

УДК 530.1+551.508

В. О. Г л а д ы ш е в, М. В. Л е л ь к о в,
А. Н. М о р о з о в, Т. М. Г л а д ы ш е в а,
Л. Ю. Г л а з к о в а

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНТЕРФЕРОМЕТРА МАЙКЕЛЬСОНА С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ОПТИКИ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД*

Представлен аналитический метод описания процессов распространения электромагнитного излучения в приближении геометрической оптики с учетом эффектов, возникающих при взаимодействии электромагнитного излучения с движущимися элементами измерительного тракта. Данный метод может быть использован при компьютерном моделировании в режиме реального времени работы геофизических интерферометров, интерферометров для регистрации гравитационного излучения, фурье-спектрометров, систем космической локации.

В настоящее время повышается уровень требований к качеству оптических измерительных систем в связи с прогрессом в области создания когерентных источников излучения, высококачественных оптических элементов, быстродействующих систем управления, предъявляются новые требования к точности математического описания процессов распространения электромагнитного излучения в разрабатываемых системах нового поколения.

Анализ показывает, что необходимо построение строгой математической модели распространения электромагнитного излучения с учетом эффектов оптики движущихся сред, когда один или несколько элементов оптической системы и исследуемый объект находятся в различных инерциальных или неинерциальных системах отсчета. Примерами подобных измерительных систем являются интерферометры для геофизических исследований [1], гравитационно-волновые интерферометры наземного и космического базирования [2, 3], фурье-спектрометры [4–6], системы космической локации [7–9]. Более того, требуемая точность при описании взаимодействия излучения с оптической системой невозможна без применения адекватной модели источника излучения, учитывающей неидеальность волнового фронта и его немонахроматичность.

*Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант № МД-170.2003.08).

В настоящей работе представлен аналитический метод описания распространения электромагнитного излучения в приближении геометрической оптики с учетом эффектов, возникающих при взаимодействии электромагнитного излучения с движущимися элементами измерительного тракта. Данный метод может быть обобщен для случая произвольного числа интерферирующих лучей и элементов оптической системы при их сложном пространственном расположении; для случая различных форм оптических поверхностей и любых законов движения оптических элементов. Представленный метод может быть рекомендован для компьютерного моделирования работы оптической измерительной системы в режиме реального времени.

Аналитическое описание распространения светового луча в оптической системе произвольной конфигурации в рамках геометрической оптики. Рассмотрим процесс распространения светового луча в произвольной оптической системе. Представим луч в виде прямой, проходящей через точку $M_j(x_j, y_j, z_j)$, лежащую на поверхности P_i (рис. 1). Падающий луч и его волновой вектор направлены параллельно вектору $\vec{a}_{i-1,j}(l_{i-1,j}, m_{i-1,j}, n_{i-1,j})$. Луч выходит из точки M_{j-1} с координатами $x_{j-1}, y_{j-1}, z_{j-1}$.

Параметрические уравнения прямой $p_{i-1,j}$ имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_{i-1,j-1} + l_{i-1,j}t, \\ y &= y_{i-1,j-1} + m_{i-1,j}t, \\ z &= z_{i-1,j-1} + n_{i-1,j}t. \end{aligned} \tag{1}$$

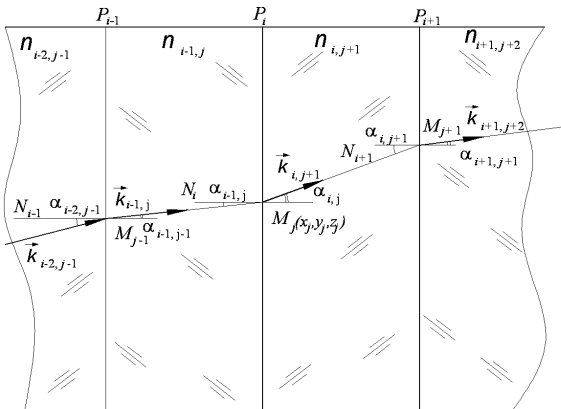


Рис. 1. Распространение электромагнитной волны в среде (среда рассматривается в виде набора слоев, обладающих диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_{i,j}$ и разделенных поверхностями P_i ; граница раздела двух соседних слоев может иметь нормальную составляющую скорости $V_i(t)$; на каждой границе раздела сред возникает преломленная и отраженная волны)

Пусть оптическая поверхность P_i описывается алгебраическим уравнением $\hat{F}_i(x, y, z) = 0$ второй степени

$$A_i x^2 + B_i y^2 + C_i z^2 + D_i xy + E_i yz + F_i zx + G_i x + H_i y + K_i z + L_i = 0. \quad (2)$$

В частном случае, если поверхность представляет собой плоскость светоделиителя, изготовленного в виде плоскопараллельной пластины, уравнение поверхности P_i примет вид

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0. \quad (3)$$

Если светоделительный элемент ориентирован обычным образом под углом $\pi/4$ к плоскостям xy и xz , то коэффициенты в уравнениях равны

$$A_i = 0, \quad B_i = 1, \quad C_i = -1, \quad D_i = L_{0i}^0;$$

здесь L_{0i}^0 — расстояния от начала координат до точек пересечения поверхности светоделительного элемента с осью z . Аналогично записываются уравнения для сферических и других элементов оптической системы.

Рассмотрим процесс преломления на поверхности. Найдем точку пересечения прямой $p_{i-1,j}$ и плоскости P_i . Для этого подставим уравнения (1) в уравнение (2). Параметр t примет вид

$$t_j = \frac{-b_j \pm \sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}{2a_j}, \quad (4)$$

где

$$a_j = A_i l_{i-1,j}^2 + B_i m_{i-1,j}^2 + C_i n_{i-1,j}^2 + D_i l_{i-1,j} m_{i-1,j} + E_i m_{i-1,j} n_{i-1,j} + F_i n_{i-1,j} l_{i-1,j},$$

$$b_j = 2(A_i l_{i-1,j} x_{i-1,j-1} + B_i m_{i-1,j} y_{i-1,j-1} + C_i n_{i-1,j} z_{i-1,j-1}) + D_i(m_{i-1,j} x_{i-1,j-1} - l_{i-1,j} y_{i-1,j-1}) + E_i(n_{i-1,j} y_{i-1,j-1} - m_{i-1,j} z_{i-1,j-1}) + F_i(l_{i-1,j} z_{i-1,j-1} - n_{i-1,j} x_{i-1,j-1}) + G_{i-1,j} l_{i-1,j} + H_{i-1,j} m_{i-1,j} + K_{i-1,j} n_{i-1,j},$$

$$c_j = A_{i-1,j} x_{i-1,j-1}^2 + B_{i-1,j} y_{i-1,j-1}^2 + C_{i-1,j} z_{i-1,j-1}^2 + D_{i-1,j} x_{i-1,j-1} y_{i-1,j-1} + E_{i-1,j} y_{i-1,j-1} z_{i-1,j-1} + F_{i-1,j} z_{i-1,j-1} x_{i-1,j-1} + G_{i-1,j} x_{i-1,j-1} + H_{i-1,j} y_{i-1,j-1} + K_{i-1,j} z_{i-1,j-1}.$$

Знак перед корнем в выражении (4) определяется направлением распространения луча. Подставив параметр t_j в уравнения (1), найдем координаты точки $M_j(x_j, y_j, z_j)$ пересечения прямой и плоскости.

Геометрический путь луча между двумя поверхностями описывается выражением

$$L_{j-1,j} = \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_j - z_{j-1})^2}. \quad (5)$$

Уравнения нормали N_i к плоскости P_i в точке $M_j(x_j, y_j, z_j)$ имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_j + \frac{\partial \hat{F}_i(x_j, y_j, z_j)}{\partial x} t, \\ y &= y_j + \frac{\partial \hat{F}_i(x_j, y_j, z_j)}{\partial y} t, \\ z &= z_j + \frac{\partial \hat{F}_i(x_j, y_j, z_j)}{\partial z} t. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда для угла падения луча на поверхность P_i (угла между прямой $p_{i-1,j}$ и нормалью \vec{N}_i) получим

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{i-1,j} &= \\ &= \frac{l_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x} + m_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y} + n_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z}}{\sqrt{(l_{i-1,j})^2 + (m_{i-1,j})^2 + (n_{i-1,j})^2} \sqrt{\left(\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Угол преломления имеет вид

$$\alpha_{i,j} = \arcsin \left(\frac{n_{i-1,j}}{n_{i,j}} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_{i-1,j}} \right); \quad (8)$$

здесь $n_{i-1,j}$ и $n_{i,j}$ — показатели преломления среды перед преломляющей поверхностью и после нее соответственно.

Найдем уравнение прямой, соответствующей преломленному лучу. Поскольку точка $M_j(x_j, y_j, z_j)$, через которую проходит искомая прямая, известна, это уравнение имеет вид

$$\frac{x - x_j}{l_{i,j+1}} = \frac{y - y_j}{m_{i,j+1}} = \frac{z - z_j}{n_{i,j+1}}. \quad (9)$$

Кроме того, так как падающий луч, преломленный луч и нормаль \vec{N}_i лежат в одной плоскости, они должны удовлетворять условию

$$\begin{vmatrix} l_{i-1,j} & m_{i-1,j} & n_{i-1,j} \\ l_{i,j+1} & m_{i,j+1} & n_{i,j+1} \\ \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x} & \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y} & \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z} \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Для угла преломления запишем

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{i,j} &= \\ &= \frac{l_{i,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x} + m_{i,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y} + n_{i,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z}}{\sqrt{(l_{i,j+1})^2 + (m_{i,j+1})^2 + (n_{i,j+1})^2} \sqrt{\left(\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Разность угла падения и угла преломления будет удовлетворять условию

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_{i-1,j} - \alpha_{i,j}) &= \\ &= \frac{l_{i-1,j} l_{i,j+1} + m_{i-1,j} m_{i,j+1} + n_{i-1,j} n_{i,j+1}}{\sqrt{(l_{i-1,j})^2 + (m_{i-1,j})^2 + (n_{i-1,j})^2} \sqrt{(l_{i,j+1})^2 + (m_{i,j+1})^2 + (n_{i,j+1})^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Разделим равенство (12) на равенство (11):

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\alpha_{i-1,j} - \alpha_{i,j})}{\cos(\alpha_{i,j})} &= \frac{l_{i-1,j} l_{i,j+1} + m_{i-1,j} m_{i,j+1} + n_{i-1,j} n_{i,j+1}}{\sqrt{(l_{i-1,j})^2 + (m_{i-1,j})^2 + (n_{i-1,j})^2}} \times \\ &\quad \times \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z}\right)^2}}{l_{i,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x} + m_{i,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y} + n_{i,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что так как угол падения равен углу отражения, в выражении (13) имеем $\alpha_{i-1,j} - \alpha_{i,j} = 2\alpha_{i,j}$. В этом случае найдем угол между падающим лучом и мнимой частью отраженного луча.

Введем обозначения с учетом сделанного замечания:

$$a^{i,j+1} = K \sqrt{(l_{i-1,j})^2 + (m_{i-1,j})^2 + (n_{i-1,j})^2},$$

$$K = \begin{cases} \cos(\alpha_{i-1,j} - \alpha_{i,j}) & \text{для случая преломления,} \\ \cos(2\alpha_{i-1,j}) & \text{для случая отражения,} \end{cases} \quad (14)$$

$$b^{i,j+1} = \cos(\alpha_{i,j}) \sqrt{\left(\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z}\right)^2}. \quad (15)$$

Уравнение (13) примет вид

$$l_{i,j+1} \left(a^{i,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x} - b^{i,j+1} l_{i-1,j} \right) + m_{i,j+1} \left(a^{i,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y} - b^{i,j+1} m_{i-1,j} \right) + n_{i,j+1} \left(a^{i,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z} - b^{i,j+1} n_{i-1,j} \right) = 0. \quad (16)$$

Из условия (10), проведя разложение определителя по второй строке, получим

$$l_{i,j+1} \left(m_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z} - n_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y} \right) + m_{i,j+1} \left(l_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z} - n_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x} \right) + n_{i,j+1} \left(l_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y} - m_{i-1,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x} \right) = 0. \quad (17)$$

Уравнения (16), (17) образуют систему, содержащую три неизвестных: $l_{i,j+1}$, $m_{i,j+1}$, $n_{i,j+1}$.

Поскольку для определения направления вектора $\vec{a}_{i,j+1}(l_{i,j+1}, m_{i,j+1}, n_{i,j+1})$ величина модуля не имеет значения, можем одну из компонент вектора выбрать произвольно. Пусть выбрано ненулевое значение компоненты $n_{i,j+1} = n_{i,j+1}^0$. Тогда, решая систему уравнений (16), (17) относительно $l_{i,j+1}^0, m_{i,j+1}^0$, получим

$$l_{i,j+1}^0 = \hat{n}_{i,j+1}^0 \left(\left(m_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x} - l_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y} \right) \left(a^{i,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y} - b^{i,j+1} m_{i-1,j} \right) - \left(n_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x} - l_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z} \right) \left(b^{i,j+1} n_{i-1,j} - a^{i,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z} \right) \right), \quad (18)$$

$$m_{i,j+1}^0 = \hat{n}_{i,j+1}^0 \left(\left(m_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z} - n_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y} \right) \left(b^{i,j+1} n_{i-1,j} - a^{i,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z} \right) - \left(m_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x} - l_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y} \right) \left(a^{i,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x} - b^{i,j+1} l_{i-1,j} \right) \right), \quad (19)$$

где

$$\hat{n}_{i,j+1}^0 = n_{i,j+1}^0 \left(\left(m_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z} - n_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y} \right) \left(a^{i,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial y} - b^{i,j+1} m_{i-1,j} \right) - \left(n_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x} - l_{i-1,j} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial z} \right) \left(a^{i,j+1} \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x} - b^{i,j+1} l_{i-1,j} \right) \right)^{-1}. \quad (20)$$

Затем, для того, чтобы направляющие косинусы сохранили свой геометрический смысл, выполним нормировку (для определенности можно положить, например, $n_{i,j+1}^0 = 1$):

$$l_{i,j+1} = \frac{l_{i,j+1}^0}{|\bar{a}_{i,j+1}^0|}, \quad m_{i,j+1} = \frac{m_{i,j+1}^0}{|\bar{a}_{i,j+1}^0|}, \quad n_{i,j+1} = \frac{n_{i,j+1}^0}{|\bar{a}_{i,j+1}^0|}, \quad (21)$$

где $|\bar{a}_{i,j+1}^0| = \sqrt{(l_{i,j+1}^0)^2 + (m_{i,j+1}^0)^2 + (n_{i,j+1}^0)^2}$.

Полученные выражения для $l_{i,j+1}$, $m_{i,j+1}$, $n_{i,j+1}$ позволяют записать уравнение преломленного или отраженного луча в каноническом виде (9) или в параметрическом виде. Уравнения (1), (2), (4), (7), (8), (14), (15), (18)–(21) образуют рекуррентную систему, позволяющую рассчитывать ход луча в сложной оптической системе. Если на входе в оптическую систему задано k лучей, то полученная рекуррентная система уравнений должна быть записана для каждого луча. В случае прохождения лучей через светоделительный элемент или многократных преотражений число уравнений увеличивается пропорционально числу лучей в плечах интерферометра. Система уравнений будет иметь решение, если заданы лучи, падающие в оптическую систему, определены уравнения преломляющих и отражающих поверхностей, а также сформулированы условия, накладывающие ограничения на апертуры оптических элементов. Данная система уравнений может быть дополнена законами изменения во времени пространственного положения оптических элементов. В этом случае коэффициенты в уравнениях поверхностей вида (2) будут являться функциями времени.

Решение данной системы уравнений позволяет определить координаты точек пересечения лучей с оптическими поверхностями и, соответственно, оптические пути в средах между поверхностями, что

необходимо для определения времени распространения электромагнитных волн и результирующих амплитуд волн на поверхности регистрации интерференционной картины. Заметим, что в общем случае данная система уравнений должна быть дополнена координатными решениями дисперсионных уравнений, определяющих дополнительное изменение фаз, углов преломления и отражения лучей, отраженных или преломленных движущимися оптическими поверхностями [10]. В случае, когда один или несколько оптических элементов находятся в неинерциальной системе координат, необходимо также учитывать явление нарушения закона преломления в каждой локальной области распространения электромагнитных волн, приводящее к искривлению световых лучей в движущихся оптических элементах [11]. Однако ввиду того, что при малых скоростях движения элементов эффекты оптики движущихся сред оказывают несущественное влияние на процессы распространения электромагнитных волн, целесообразно ограничиться частным случаем решения дисперсионного уравнения, которое позволяет учесть лишь изменение частот электромагнитных волн, отраженных движущимся зеркалом.

Расчет интенсивности излучения в плоскости фотодетектора для N лучей с учетом движения зеркала. Пусть источник света создает амплитуду электромагнитной волны на поверхности P_0 :

$$E_{00}(t) = E_0(t) \exp(-i(\omega_0 t + \varphi_0(t))), \quad (22)$$

где $E_0(t)$, $\varphi_0(t)$ — начальная амплитуда и фаза электромагнитной волны. В частном случае поверхность P_0 является плоскостью xy , характеризуемой точками $M_0(x_0(k), y_0(k), z_0(k))$, из которых распространяются N лучей, направленных вдоль векторов $\vec{a}_{0,1}(l_{0,1}(k), m_{0,1}(k), n_{0,1}(k))$. Будем считать, что частота ω_0 и фаза φ_0 k -го луча могут быть разными для разных лучей, но с достаточной степенью точности они могут оставаться постоянными для каждого луча в пределах длительности регистрации интерференционной картины. Рассмотрим процесс распространения произвольного луча в интерферометре Майкельсона. Здесь индекс k номера луча можно опустить. Тогда на первой поверхности светоделительного элемента (СД) амплитуда имеет вид (рис. 2):

$$E_1(t) = T_{01}(\omega_0) E_0(t - t_{01}) \exp(-i(\omega_0(t - t_{01}) + \varphi_0 - k_0 n_{01} L_{01})), \quad (23)$$

где $T_{01}(\omega_0)$ — амплитудный коэффициент пропускания первой поверхностью СД для частоты ω_0 , $t_{01} = L_{01}/c_{01} = n_{01} L_{01}/c$, $k_0 = \omega_0/c$, $L_{01} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$, $x_0 = 0$.

На второй поверхности СД для первого луча в прямом направлении амплитуда имеет вид

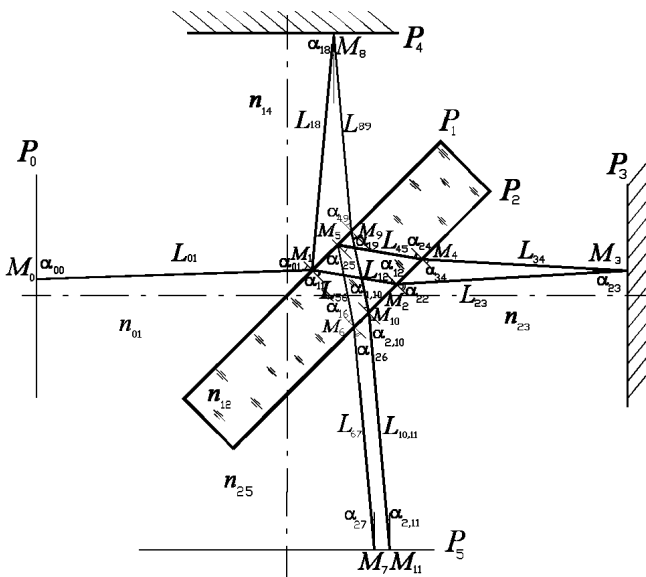


Рис. 2. Двумерная схема распространения лучей в интерферометре Майкельсона (в трехмерной модели рассматриваются N лучей, волновые векторы которых направлены параллельно вектору $\vec{a}_{i-1,j}(l_{i-1,j}, m_{i-1,j}, n_{i-1,j})$; каждый луч характеризуется точкой $M_{j-1}(x_{j-1}, y_{j-1}, z_{j-1})$ пересечения с поверхностью P_i)

$$E_2(t) = T_{01}(\omega_0)E_0(t - t_{01} - t_{12}) \times \exp(-i(\omega_0(t - t_{01} - t_{12}) + \varphi_0 - k_0(n_{01}L_{01} + n_{12}L_{12}))); \quad (24)$$

здесь $t_{12} = n_{12}L_{12}/c$ — время распространения луча между поверхностями СД, $L_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$; сдвиг фазы β_0 при прохождении через СД равен нулю.

Введем величину $t_2 = t_{01} + t_{12}$. Тогда

$$E_2(t) = T_{01}(\omega_0)E_0(t - t_2) \times \exp(-i(\omega_0(t - t_2) + \varphi_0 - k_0(n_{01}L_{01} + n_{12}L_{12}))). \quad (25)$$

Затем электромагнитная волна падает на подвижное зеркало — плоскость P_3 . Амплитуда волны на подвижном зеркале равна

$$E_3(t) = T_{01}(\omega_0)T_{23}(\omega_0)E_0(t - t_3) \exp(-i(\omega_0(t - t_3) + \varphi_0 - k_0(n_{01}L_{01} + n_{12}L_{12} + n_{23}(L_{23} + \Delta L_{23}(t))))), \quad (26)$$

где $t_3 = t_{01} + t_{12} + t_{23} + \Delta t_3$; Δt_3 — время распространения луча между начальным и текущим положением подвижного зеркала, $\Delta t_3 = n_{23}\Delta L_3(t)/c$; $\Delta L_3(t)$ — смещение зеркала в момент времени t ; $t_{23} = n_{23}L_{23}/c$; $T_{23}(\omega_0)$ — амплитудный коэффициент пропускания второй поверхности СД при прохождении луча в среду с показателем преломления n_{23} для частоты ω_0 .

Расстояние между СД и подвижным зеркалом равно $L_{23} + \Delta L_3 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2}$, время распространения луча $t_{23} + \Delta t_3 = n_{23}(L_{23} + \Delta L_3)/c$.

После отражения от подвижного зеркала на поверхности P_2 СД амплитуда первого луча имеет вид

$$E_4(t) = T_{01}(\omega_0)T_{23}(\omega_0)R_3(\omega_0)E_0(t - t_4) \times \\ \times \exp\left(-i(\omega_1(t - t_{34})(t - t_{34}) - \omega_0 t_3 + \varphi_0 + \beta_3 - \right. \\ \left. - k_1(t - t_{34})n_{23}(L_{34} + \Delta L_3(t - t_{34})) - \right. \\ \left. - k_0(n_{01}L_{01} + n_{12}L_{12} + n_{23}(L_{23} + \Delta L_3(t - t_{34}))))\right), \quad (27)$$

где $t_4 = t_{01} + t_{12} + t_{23} + 2\Delta t_3 + t_{34}$; $t_{34} = n_{23}L_{34}/c$; β_3 — сдвиг фазы при отражении от подвижного зеркала; $R_3(\omega_0)$ — амплитудный коэффициент отражения от подвижного зеркала для частоты ω_0 , $k_1(t) = \omega_1(t)/c$.

При нормальном падении лучей в пределе малых скоростей подвижного зеркала ($\beta \ll 1$) отраженная волна будет иметь частоту

$$\omega_1(t) = \omega_0 \frac{1 + \beta(t)}{1 - \beta(t)}, \quad (28)$$

где $\beta(t) = V(t)/c$, $V(t)$ — зависимость скорости зеркала от времени.

Расстояние между подвижным зеркалом и СД при обратном ходе лучей равно $L_{34} + \Delta L_3 = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2}$, время распространения лучей $t_{34} + \Delta t_3 = n_{23}(L_{34} + \Delta L_3)/c$.

В используемом приближении угол падения равен углу отражения, амплитуда и плоскость поляризации волны остаются неизменными. Очевидно, что в данной модели зависимость $V(t)$ может иметь произвольный вид. В частном случае гармонического закона отклонения положения зеркала P_3 от положения равновесия имеем

$$\Delta L_3(t) = L_{03}(t) - L_{03}^0 = S_0 \sin(\Omega t + \psi_0), \quad V(t) = S_0 \Omega \cos(\Omega t + \psi_0);$$

здесь S_0 , Ω , ψ_0 — амплитуда, частота и начальная фаза смещения зеркала. При этом коэффициент D_3 в уравнении вида (3) для плоскости P_3 становится функцией времени: $D_3(t) = L_{03}(t)$.

При прохождении лучами СД в обратном направлении амплитуда первого луча на первой поверхности СД имеет вид

$$E_5(t) = T_{01}^2(\omega_0)T_{23}(\omega_0)R_3(\omega_0)E_0(t - t_5) \times \\ \times \exp(-i(\omega_1(t - t_{34} - t_{45})(t - t_{34} - t_{45}) - \omega_0 t_3 + \varphi_0 + \beta_3 -$$

$$-k_1(t - t_{34} - t_{45})(n_{23}(L_{34} + \Delta L_3(t - t_{34} - t_{45})) + n_{12}L_{45}) - \\ -k_0(n_{01}L_{01} + n_{12}L_{12} + n_{23}(L_{23} + \Delta L_3(t - t_{34} - t_{45}))), \quad (29)$$

где $t_5 = t_{01} + t_{12} + t_{23} + 2\Delta t_3 + t_{34} + t_{45}$; $t_{45} = n_{12}L_{45}/c$; $L_{45} = \sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2 + (z_5 - z_4)^2}$; сдвиг фазы β_{45} при преломлении на второй поверхности P_2 СД в обратном направлении лучей равен нулю. Здесь полагаем, что смещение частоты отраженного луча не приводит к изменению коэффициента пропускания СД.

После отражения от первой поверхности и прохождении СД в направлении фотодетектора (ФД) амплитуда первого луча на второй поверхности СД имеет вид

$$E_6(t) = T_{01}^2(\omega_0)T_{23}(\omega_0)R_3(\omega_0)R_{12}(\omega_0)E_0(t - t_6) \times \\ \times \exp(-i(\omega_1(t - t_{34} - 2t_{45})(t - t_{34} - 2t_{45}) - \omega_0 t_3 + \varphi_0 + \beta_3 - \\ - k_1(t - t_{34} - 2t_{45})(n_{23}(L_{34} + \Delta L_3(t - t_{34} - 2t_{45})) + 2n_{12}L_{45}) - \\ - k_0(n_{01}L_{01} + n_{12}L_{12} + n_{23}(L_{23} + \Delta L_3(t - t_{34} - 2t_{45}))))), \quad (30)$$

где $t_6 = t_{01} + t_{12} + t_{23} + 2\Delta t_3 + t_{34} + 2t_{45}$; в точке M_5 сдвиг фазы β_5 при отражении от оптически менее плотной среды равен нулю; сдвиг фазы β_{56} при прохождении второй поверхности СД P_2 в направлении ФД также равен нулю; $L_{56} = \sqrt{(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2 + (z_6 - z_5)^2}$; для плоскопараллельной пластины выполняется равенство $L_{45} = L_{56}$.

В плоскости ФД для первого луча получаем

$$E_7(t) = T_{01}^2(\omega_0)T_{23}(\omega_0)R_3(\omega_0)R_{12}(\omega_0)E_0(t - t_7) \times \\ \times \exp(-i(\omega_1(t - t_{34} - 2t_{45} - t_{67})(t - t_{34} - 2t_{45} - t_{67}) - \\ - \omega_0 t_3 + \varphi_0 + \beta_3 - k_1(t - t_{34} - 2t_{45} - t_{67})(n_{23}(L_{34} + \Delta L_3(t - t_{34} - \\ - 2t_{45} - t_{67})) + 2n_{12}L_{45} + n_{25}L_{67}) - k_0(n_{01}L_{01} + n_{12}L_{12} + \\ + n_{23}(L_{23} + \Delta L_{23}(t - t_3 - 2t_{45} - t_{67}))))), \quad (31)$$

где $t_7 = t_{01} + t_{12} + t_{23} + 2\Delta t_3 + t_{34} + 2t_{45} + t_{67}$,

$$L_{67} = \sqrt{(x_7 - x_6)^2 + (y_7 - y_6)^2 + (z_7 - z_6)^2}.$$

Аналогично, полагая, что коэффициенты пропускания на СД для первого и второго лучей равны, получим для второго луча в плоскости ФД

$$E_{11}(t) = R_{01}(\omega_0)R_4(\omega_0)T_{01}(\omega_0)T_{23}(\omega_0)E_0(t - t_{11}) \times$$

$$\times \exp(-i(\omega_0(t - t_{11}) + \varphi_0 + \beta_1 + \beta_4 - k_0(n_{01}L_{01} + n_{14}(L_{18} + L_{89}) + n_{12}L_{9,10} + n_{25}L_{10,11}))), \quad (32)$$

где $t_{11} = t_{01} + t_{18} + t_{89} + t_{9,10} + t_{10,11}$, $t_{18} = n_{14}L_{18}/c$, $t_{89} = n_{14}L_{89}/c$, $t_{9,10} = n_{12}L_{9,10}/c$, $t_{10,11} = n_{25}L_{10,11}/c$,

$$L_{18} = \sqrt{(x_8 - x_1)^2 + (y_8 - y_1)^2 + (z_8 - z_1)^2},$$

$$L_{89} = \sqrt{(x_9 - x_8)^2 + (y_9 - y_8)^2 + (z_9 - z_8)^2},$$

$$L_{9,10} = \sqrt{(x_{10} - x_9)^2 + (y_{10} - y_9)^2 + (z_{10} - z_9)^2},$$

$$L_{10,11} = \sqrt{(x_{11} - x_{10})^2 + (y_{11} - y_{10})^2 + (z_{11} - z_{10})^2};$$

здесь β_1 — сдвиг фазы второго луча при отражении от первой поверхности P_1 СД; β_4 — сдвиг фазы при отражении от неподвижного зеркала. Сдвиг фазы луча при преломлении на гранях СД равен нулю. Заметим, что $\beta_3 = \pi$, $\beta_1 + \beta_4 = 2\pi$.

Рассмотрим интерференцию двух лучей, один из которых прошел первое плечо, а другой — второе плечо интерферометра. Предположим, что рассмотренные выше лучи попадают в одну область экрана, которая представляет собой чувствительную площадку фотодетектора.

Интенсивность интерференционной картины в плоскости ФД имеет вид

$$I_{7,11}(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c (E_7(t) + E_{11}(t)) (E_7(t) + E_{11}(t))^*. \quad (33)$$

Введем следующие обозначения:

$$E_1(t) = T_{01}^2(\omega_0)T_{23}(\omega_0)R_3(\omega_0)R_{12}(\omega_0)E_0(t - t_7), \quad (34)$$

$$E_2(t) = R_{01}(\omega_0)R_4(\omega_0)T_{01}(\omega_0)T_{23}(\omega_0)E_0(t - t_{11}), \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) = & \omega_1(t - t_{34} - 2t_{45} - t_{67})(t - t_{34} - 2t_{45} - t_{67}) - \omega_0 t_3 + \varphi_0 + \beta_3 - \\ & - k_1(t - t_{34} - 2t_{45} - t_{67})(n_{23}(L_{34} + \Delta L_3(t - t_{34} - 2t_{45} - t_{67})) + \\ & + 2n_{12}L_{45} + n_{25}L_{67}) - k_0(n_{01}L_{01} + n_{12}L_{12} + n_{23}(L_{23} + \\ & + \Delta L_{23}(t - t_3 - 2t_{45} - t_{67}))), \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t) = & \omega_0(t - t_{11}) + \varphi_0 + \beta_1 + \beta_4 - \\ & - k_0(n_{01}L_{01} + n_{14}(L_{18} + L_{89}) + n_{12}L_{9,10} + n_{25}L_{10,11}). \quad (37) \end{aligned}$$

Выражения примут вид

$$E_7(t) = E_1(t) \exp(-i\Phi_1(t)), \quad (38)$$

$$E_{11}(t) = E_2(t) \exp(-i\Phi_2(t)). \quad (39)$$

После подстановки выражений (38), (39) в выражение (33) и применения формулы Эйлера получим

$$I(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c (E_1(t)(\cos \Phi_1(t) - i \sin \Phi_1(t)) + E_2(t)(\cos \Phi_2(t) - i \sin \Phi_2(t)))(E_1(t)(\cos \Phi_1(t) + i \sin \Phi_1(t)) + E_2(t)(\cos \Phi_2(t) + i \sin \Phi_2(t))). \quad (40)$$

После преобразований получим

$$I(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left((E_1(t) \cos \Phi_1(t) + E_2(t) \cos \Phi_2(t))^2 + (E_1(t) \sin \Phi_1(t) + E_2(t) \sin \Phi_2(t))^2 \right). \quad (41)$$

Обобщая для случая произвольного числа $n+m$ лучей, попадающих в рассматриваемую область апертуры ФД, получим общее выражение для интенсивности на ФД:

$$I(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left(\left(\sum_{i=1}^n E_1^i(t) \cos \Phi_1^i(t) + \sum_{j=1}^m E_2^j(t) \cos \Phi_2^j(t) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n E_1^i(t) \sin \Phi_1^i(t) + \sum_{j=1}^m E_2^j(t) \sin \Phi_2^j(t) \right)^2 \right); \quad (42)$$

здесь n — число лучей, прошедших первое плечо интерферометра; m — число лучей, прошедших второе плечо интерферометра;

$$E_1^i(t) = T_{01}^2(\omega_0^i) T_{23}(\omega_0^i) R_3(\omega_0^i) R_{12}(\omega_0^i) E_0^i(t - t_7^i), \quad (43)$$

$$E_2^j(t) = R_{01}(\omega_0^j) R_4(\omega_0^j) T_{01}(\omega_0^j) T_{23}(\omega_0^j) E_0^j(t - t_{11}^j), \quad (44)$$

$$\Phi_1^i(t) =$$

$$= \omega_1^i(t - t_{34}^i - 2t_{45}^i - t_{67}^i)(t - t_{34}^i - 2t_{45}^i - t_{67}^i) - \omega_0^i t_3^i + \varphi_0^i + \pi - k_1^i(t - t_{34}^i - 2t_{45}^i - t_{67}^i)(n_{23}(L_{34}^i + \Delta L_3^i(t - t_{34}^i - 2t_{45}^i - t_{67}^i))) +$$

$$+ 2n_{12}L_{45}^i + n_{25}L_{67}^i) - k_0^i(n_{01}L_{01}^i + n_{12}L_{12}^i + n_{23}(L_{23}^i + \Delta L_{23}^i(t - t_3^i - 2t_{45}^i - t_{67}^i))), \quad (45)$$

$$\Phi_2^j(t) = \omega_0^j(t - t_{11}^j) + \varphi_0^j + 2\pi - k_0^j(n_{01}L_{01}^j + n_{14}(L_{18}^j + L_{89}^j) + n_{12}L_{9,10}^j + n_{25}L_{10,11}^j), \quad (46)$$

$$i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m};$$

для всей апертуры ФД выполняется $n = m = N$.

Уравнения (42)–(46), выражения для коэффициентов, входящих в эти уравнения, и рекуррентная система, полученная в предыдущем параграфе, позволяют осуществлять расчет распределения интенсивности электромагнитного излучения на поверхности фоточувствительного элемента. При необходимости аналогичным образом может быть рассчитана временная зависимость пространственного распределения амплитуды электромагнитного поля в любой области распространения электромагнитного излучения.

Заключение. Предложенная модель может быть использована при описании процессов интерференции как в классических монохроматических интерферометрах Майкельсона, предназначенных для регистрации сверхмалых смещений зеркал, так и в широкоапертурных интерферометрах фурье-спектрометров, на вход которых поступает некогерентный свет от исследуемого излучающего объекта. При этом появляется возможность решить задачу описания процесса интерференции лучей в фурье-спектрометре, входящих в него под достаточно большими (более 0,1 рад) углами по отношению к оси оптической системы.

В зависимости от конкретной области применения модель должна быть дополнена либо уравнениями динамики зеркал в поле земного тяготения при реализации интерферометра с зеркалами, установленными на свободных массах, либо моделью абсолютно черного тела, с которым производится сравнение исследуемого спектра при моделировании и обработке экспериментальных данных фурье-спектрометра.

Дальнейшее развитие предложенной модели возможно по пути дополнения полученной системы уравнений координатными решениями дисперсионных уравнений в виде зависимостей координатных проекций волновых векторов электромагнитных волн, прошедших движущиеся оптические элементы, от скорости движения среды, а также уравнениями для зависимостей амплитуд поляризованных компонент электромагнитных волн от скорости и направления движения сред распространения волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R o b e r t s o n D. S. Geophysical applications of very-long-baseline interferometry // *Reviews of Mod. Phys.* – 1991. – V. 63. – № 4. – P. 899–918.
2. G i a z o t t o A. Interferometric detection of gravitational waves // *Physics Reports.* – 1989. – V. 182. – № 6. – P. 365–424.
3. A n d e r s o n A. J. The space multi-arm interferometer and the search for cosmic background gravitational wave radiation (SMILE) // *Proc. of Int. Assoc. Geod. Symp. (USA, Vancouver, 1987).* – V. 1. – P. 83–90.
4. Д в о р у к С. К., М о р о з о в А. Н., П о з д н я к о в В. А. и др. Применение фурье-спектрорадиометра для анализа необратимых химических и физических процессов в природе // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”.* – 2001. – № 1. – С. 87–101.
5. Д в о р у к С. К., К о р н и е н к о В. Н., К о ч и к о в И. В. и др. Обработка двусторонних интерферограмм с учетом собственного фонового излучения фурье-спектрорадиометра // *Оптика и спектроскопия.* – 2002. – Т. 93. – № 5. – С. 884–889.
6. A s h b y N., S p i l k e r J. J. Jr. Introduction to Relativistic Effects on the Global Positioning System // *Global Positioning System: Theory and Applications.* – Washington, 1997. – P. 623–697.
7. Ф о м и ч е в А. А., Д м и т р и е в В. Г., К о л ч е в А. Б. и др. Комплексная инерциально-спутниковая навигационная система на базе лазерных гироскопов для самолетов гражданской авиации // *Вестник SPIE/RUS.* – 1995. – Т. 5. – № 1. – С. 28–31.
8. В а с и л ь е в В. П., Г р и ш м а н о в с к и й В. А., П л и е в Л. Ф., С т а р ц е в Т. П. О влиянии движения оптической среды при локации // *Письма в ЖЭТФ.* – 1992. – Т. 55. – Вып. 6. – С. 317–320.
9. В а с и л ь е в В. П., Г у с е в Л. И., Д е н г а н Дж. Дж., Ш а р г о р о д с к и й В. Д. Экспериментальная проверка влияния эффекта Физо на направление отраженного светового луча при спутниковой лазерной дальнометрии // *Радиотехника.* – 1966. – № 4. – С. 80–84.
10. Г л а д ы ш е в В. О. Распространение плоской монохроматической электромагнитной волны в среде со сложным движением // *Журнал теоретической физики.* – 1999. – Т. 69. – Вып. 5. – С. 970–100.
11. Г л а д ы ш е в В. О. Искривление траектории распространения плоской монохроматической электромагнитной волны в среде с вращением // *Письма в ЖЭТФ.* – 1993. – Т. 58. – Вып. 8. – С. 593–597.

Статья поступила в редакцию 29.06.2004



Владимир Олегович Гладышев родился в 1966 г., окончил в 1989 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 80 научных работ, в том числе двух монографий в области теоретической физики.

V.O. Gladyshev (b. 1966) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1989. D.Sc. (Phys.-Math.), professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 80 publications including 2 monographs in the field of theoretical physics.

Максим Викторович Лельков родился в 1976 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2000 г. Аспирант кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор трех научных работ в области расчета и создания оптических систем.

M.V. Lelkov (b. 1976) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2000. Post-graduate of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 3 publications in the field of design and development of optical systems.



Андрей Николаевич Морозов родился в 1959 г., окончил в 1981 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области прецизионных измерений и физической кинетики.

A.N. Morozov (b. 1959) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1981. D.Sc. (Phys.-Math.), professor, head of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 100 publications in the field of high precision measuring systems and physical kinetics.



Татьяна Михайловна Гладышева родилась в 1966 г., окончила в 1990 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 25 научных работ в области оптической интерферометрии.

T.M. Gladysheva (b. 1966) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1990. Ph.D. (Eng.), assoc. professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 25 publications in the field of optical interferometry.



Лейла Юрьевна Глазкова родилась в 1960 г., окончила в 1983 г. МАИ. Автор 10 научных работ в области математического моделирования.

L.Yu. Glazkova (b. 1960) graduated from the Moscow Aviation Institute in 1983. Author of 10 publications in the field of mathematical simulation.

