УДК 532.7

ОПИСАНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФФУЗИИ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ФАЗ КАК НЕМАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

А.Н. Морозов, А.В. Скрипкин

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

skripkin@bmstu.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Рассмотрены процессы теплопроводности и диффузии в пространстве над плоской поверхностью жидкости, поверхностью сферической частицы аэрозоля и цилиндрической поверхностью при условии наличия флуктуаций теплового или массового потока через указанные поверхности. Показано, что соответствующие случайные изменения температуры, концентрации, теплового и массового потоков представляют собой немарковские случайные процессы, и для их описания необходимо использование интегральных стохастических уравнений. Найдены статистические характеристики таких флуктуаций, включая характеристические функции и спектральные плотности.

Ключевые слова: теплопроводность, диффузия, немарковский процесс, интегральный оператор.

При изучении явлений теплопроводности и диффузии в средах с фазовыми границами во многих случаях приходится учитывать случайные изменения соответствующих физических величин (например температуры или теплового потока), вызванные флуктуациями мощности соответствующих источников, потоков, коэффициентов теплопроводности или диффузии и т.д. Описание процессов распространения тепла и диффузии в этом случае обычно проводят с помощью стохастических дифференциальных уравнений параболического типа с определенными начальными и граничными условиями. Случайные процессы, описываемые такими уравнениями, имеют характер марковских, а для получения статистических характеристик флуктуаций физических величин может быть использована хорошо разработанная теория стохастических дифференциальных систем [1].

Однако такая модель случайных процессов является приближенной, не учитывающей, в частности, наследственные свойства реальных физических сред. Так, как было показано в работах [2, 3], более точное описание процессов броуновского движения, учитывающее увлечение броуновской частицей окружающих ее частиц вязкой среды или флуктуации кинетического коэффициента трения, приводит к немарковскому характеру флуктуаций импульса броуновской частицы.

Показано [4], что явления теплопроводности и диффузии на границе раздела двух фаз, учитывающие указанные выше флуктуации, могут быть описаны с использованием интегральных стохастических уравнений, общий вид которых имеет вид

$$Z(t) = \int_0^t G(t,\tau)\,dW(\tau), \qquad (1)$$

где $Z(t)$ – соответствующий процесс (для случая теплопроводности – температура или тепловой поток, для случая диффузии – концентрация или массовый поток); $G(t, \tau)$ – ядро интегрального уравнения, отвечающее за свойства изучаемого немарковского процесса; $W(t)$ – процесс с независимыми приращениями, задающий соответсвующие флуктуации тепловых или массовых потоков. В простейшем случае такие флуктуации могут быть представлены винеровским или пуассоновским процессом.

Представление случайного процесса в виде (1) позволяет определить [4] его характеристические функции любого порядка, а значит, и любые его статистические характеристики.

Рассмотрим неподвижную сферическую частицу аэрозоля радиуса R с температуропроводностью $\chi_м$ и объемной теплоемкостью c_V, в центр которой поместим начало сферической системы координат. Температуру поверхности частицы будем считать некоторой функцией времени $T_R(t)$. Среду вне сферической частицы (при $r > R$) считаем однородной с постоянными параметрами: плотностью ρ, теплопроводностью κ и температуропроводностью χ, причем $\chi \ll \chi_м$. Начальная температура во всем пространстве равна некоторой постоянной величине T_0. Изменением радиуса сферической частицы вследствие изменения температуры пренебрегаем. Ясно, что в рассматриваемом случае температура среды будет зависеть только от расстояния до центра сферы r и времени t. Уравнение теплопроводности тогда примет вид

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}=\frac{\chi}{r}\frac{\partial^2(rT(r,t))}{\partial r^2} \quad (r>R) \tag{2}$$

с соответствующими граничным и начальным условиями

$$T(r,t)\big|_{r=R}=T_R(t), \quad T(r,t)\big|_{t=0}=T_0. \tag{3}$$

Для потока тепла $q_T(t)$ через поверхность сферической оболочки радиуса R справедливо общее соотношение

$$q_T(t)=-\kappa\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=R}. \tag{4}$$

С другой стороны, тот же поток $q_T(t)$ при учете его флуктуаций через поверхность оболочки радиуса R может быть определен с помощью выражения

$$q_T(t)=-\frac{c_V R}{3}\frac{dT_R(t)}{dt}+\xi_{q_T}(t), \tag{5}$$

где $\xi_{q_T}(t)$ – случайный тепловой поток (источник Ланжевена), свойства которого зависят от характера источника флуктуаций, причем $\langle\xi_{q_T}(t)\rangle=0$. Отметим, что соотношение (5) справедливо для случая предполагаемой нами высокой тепловой проводимости частицы.

Решая поставленную задачу, получим искомое соотношение, связывающее случайный тепловой поток $\xi_{q_T}(t)$ через границу сферической оболочки и производную температуры $T_R(t)$ на поверхности по времени, имеющее вид интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$Z(t)+\frac{3\kappa}{c_V R\sqrt{\pi\chi}}\int_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}+\frac{\sqrt{\pi\chi}}{R}\right)\times$$

$$\times Z(\tau)d\tau=\tilde{\xi}_{q_T}(t), \tag{6}$$

где

$$Z(t)=\frac{dT_R(t)}{dt}, \quad \tilde{\xi}_{q_T}(t)=\frac{3}{c_V R}\xi_{q_T}. \tag{7}$$

С применением метода описания немарковских процессов, изложенных в [4], легко могут быть найдены статистические характеристики изучаемого процесса. В частности, для установившейся спектральной плотности температуры частицы можно получить

$$G_{T_R}(\omega)=\left(\frac{c_V^2R^2\omega^2}{9}+\frac{\sqrt{2}\kappa c_V R}{3\sqrt{\chi}}\omega^{3/2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\kappa^2}{\chi}\omega+\frac{\sqrt{2}\kappa}{R\sqrt{\chi}}\omega^{1/2}+\frac{\kappa^2}{R^2}\right)^{-1}\nu. \tag{8}$$

Аналогично можно получить статистические характеристики процесса теплопроводности на разделе двух фаз, имеющие плоскую или цилиндрическую границу, а также провести описание процессов диффузии в случаях, если она осуществляется на границе двух сред с рассматриваемой симметрией.

Список литературы

1. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1990. 632 с.
2. Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Применение интегральных преобразований для описания броуновского движения как немарковского случайного процесса // Изв. вузов. Физика. 2009. №2. С. 66–74.
3. Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Статистическое описание осциллятора, находящегося под воздействием флуктуирующего коэффициента трения // Вестник МГТУ. Естественные науки. 2008. №2. С. 3–15.
4. Морозов А.Н. Необратимые процессы и броуновское движение. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 332 с.

DESCRIPTION OF THERMAL CONDUCTIVITY AND DIFFUSION AT THE PHASE INTERFACE AS NON-MARKOVIAN RANDOM PROCESSES

A.N. Morozov, A.V. Skripkin

The processes of heat conduction and diffusion in the space above the flat surface of the liquid, surface of a spherical aerosol particles and the cylindrical surface provided that the fluctuations of heat or mass flux through these surfaces are described. It is shown that the corresponding random changes in temperature, concentration, heat and mass flows are non-Markovian random processes, and integral stochastic equations must be used to describe them. Statistical characteristics of these fluctuations, including the characteristic function and spectral density, aredetermined.

Keywords: heat conductivity, diffusion, non-Markovian process, integral operator.